ЛІПШИЦЕВИЙ АНАЛОГ ЛЕМИ ІКОМИ-ШВАРЦА

Салімов Р. Р., Стефанчук М. В.

Інститут математики НАН України, Київ

1 березня 2018 р.

Відображення класу Соболєва

Нехай G — область у комплексній площині $\mathbb{C}$, $p > 1$.

Відображення $f\colon G \to \mathbb{C}$ належить класу Соболєва $W^{1,p}_{\rm loc}$, якщо
1. f абсолютно неперервне майже на всіх лінійних відрізках, що належать області G та паралельні координатним осям;
2. всі частинні похідні відображення f локально інтегровні в G у степені p.

Гомеоморфізм f класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ називається *регулярним*, якщо його якобіан $J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2 > 0$ майже всюди.

Тут

$$f_z = \frac{f_x - if_y}{2}, f_{\overline{z}} = \frac{f_x + if_y}{2}.$$

Кутова дилатація

Позначимо $B_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant \varepsilon\}$, $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Нехай $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ — регулярний гомеоморфізм класу Соболєва $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, $p > 1$. Будемо називати p-*кутовою дилатацією* відображення f відносно точки $z_0 = 0$ величину:

$$D_p(z) = D_p(re^{i\theta}) = \frac{|f_\theta(re^{i\theta})|^p}{r^p J_f(re^{i\theta})}. \tag{1}$$

Тут $z = re^{i\theta}$, J_f — якобіан відображення f.

Вперше при $p = 2$ кутова дилатація розглядалася у роботах Гутлянського В. Я. і була застосована до дослідження рівнянь Бельтрамі.

Основний результат

Теорема. Нехай $f\colon \mathbb{B}\to\mathbb{B}$ — регулярний гомеоморфізм класу Соболєва $W^{1,2}_{loc}$ і $f(0)=0$. Припустимо, що $p>2$ та існує $k\geqslant 0$, таке, що

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{|B_\varepsilon|}\int\limits_{B_\varepsilon} D_p^{\frac{1}{p-1}}(z)\,dxdy\right)^{p-1}\leqslant k<\infty.$$

Тоді

$$\liminf_{z\to 0}\frac{|f(z)|}{|z|}\leqslant c_p\,k^{\frac{1}{p-2}}<\infty,$$

де c_p — додатна константа, яка залежить тільки від p.

Приклад

Припустимо, що $f\colon \mathbb{B}\to\mathbb{B}$, де $f(z)=kz,\ 0<|k|\leqslant 1$. Нехай $z=re^{i\theta}$, тоді $f(z)=kre^{i\theta}$. Знаходимо

$$\frac{\partial f}{\partial\theta}=kire^{i\theta}, \frac{\partial f}{\partial r}=ke^{i\theta}, J_f\left(re^{i\theta}\right)=\frac{1}{r}\cdot\mathtt{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\cdot\overline{\frac{\partial f}{\partial r}}\right)=|k|^2.$$

Звідси

$$D_p\left(re^{i\theta}\right)=\frac{|\frac{\partial f}{\partial\theta}|^p}{r^pJ_f\left(re^{i\theta}\right)}=|k|^{p-2},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{|B_\varepsilon|}\int\limits_{B_\varepsilon}D_p^{\frac{1}{p-1}}(z)\,dxdy\right)^{p-1}=|k|^{p-2}<\infty.$$

З іншого боку, очевидно

$$\lim_{z\to 0}\frac{|f(z)|}{|z|}=|k|<\infty.$$

Наслідок

Наслідок. Нехай $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ — регулярний гомеоморфізм класу Соболєва $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ і $f(0) = 0$. Припустимо, що $p > 2$ і

(2) $$\liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|B_\varepsilon|} \int\limits_{B_\varepsilon} D_p^{\frac{1}{p-1}}(z)\, dxdy = 0.$$

Тоді

(3) $$\liminf_{z \to 0} \frac{|f(z)|}{|z|} = 0.$$

Приклад

Припустимо, що $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, де $f(z) = z \cdot |z|^{\alpha}$, $\alpha > 0$.

Нехай $z = re^{i\theta}$, тоді $f(z) = r^{\alpha+1}e^{i\theta}$. Знаходимо

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = ir^{\alpha+1}e^{i\theta}, \ \frac{\partial f}{\partial r} = (\alpha+1)r^{\alpha}e^{i\theta}$$

і

$$J_f\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{r} \cdot \mathtt{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \overline{\frac{\partial f}{\partial r}}\right) = (\alpha+1)r^{2\alpha}.$$

Тоді

$$D_p\left(re^{i\theta}\right) = \frac{|\frac{\partial f}{\partial \theta}|^p}{r^p J_f\left(re^{i\theta}\right)} = \frac{1}{\alpha+1} \cdot r^{\alpha(p-2)}.$$

Приклад

Очевидно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{|B_\varepsilon|}\int\limits_{B_\varepsilon} D_p^{\frac{1}{p-1}}(z)\,dxdy\right)^{p-1} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi\varepsilon^2}\int\limits_{B_\varepsilon}\left(\frac{1}{\alpha+1}\cdot r^{\alpha(p-2)}\right)^{\frac{1}{p-1}} r\,drd\varphi = 0.$$

З іншого боку,

$$\lim_{z\to 0}\frac{|f(z)|}{|z|} = 0.$$